# 线性代数　中国科学技术大学 2023 春
# 张量简介

主讲: 杨金榜
地空楼 525

助教: 苏煜庭、陈鉴、夏小凡

# 张量简介

在物理学中,张量的任务是描述物理量坐标变换时的变换规律。其提供了一个简明的数学框架用来描述和解决力学(应力、弹性、流体力学、惯性矩等)、电动力学(电磁张量、麦克斯韦张量、介电常数、磁化率等)、广义相对论(应力-能量张量、曲率张量等)物理问题。

有两种定义张量的方法:

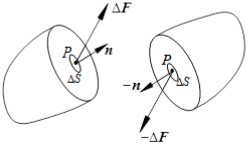
1. 通常定义张量的物理学或传统数学方法,是把张量看成一个多维数组,当变换坐标或变换基底时,其分量会按照一定的规则变换.
2. 现代数学中的方法,是把张量定义成某个向量空间或其对偶空间上的多重线性映射,这向量空间在需要引入基底之前不固定任何坐标系统。

经典物理学中将一阶张量归结为向量(矢量)、二阶张量归结为并矢.但到了相对论力学、电动力学和引力理论中,空间成为非欧氏的,甚至是弯曲的,这时就不可避免地需要运用张量分析.

# 物理学中的张量--应力张量 (stress tensor)

应力张量是描述物体内部应力分布的重要工具.

下面我们看 P 处的应力张量:

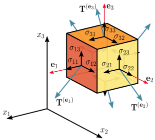



(a) (b)

$$\text{面积元 } \Delta S \xmapsto[\text{应力张量}]{P\text{ 处应力分布}} \text{作用力 } \Delta F.$$

若将面积元和作用力视为空间向量, 则应力张量为三维空间的一个线性变换.

通过选定三维空间的一个 (直角) 坐标系, 则应力张量可表示为一个 3 阶方阵.



# 线性代数 (B1) 课程中学到的张量

给定域 $\mathbb{F}$ 上的一个线性空间 $V$. 设 $P$ 为从基 $e=(e_1,\cdots,e_n)$ 到基 $e'=(e'_1,\cdots,e'_n)$ 的过渡矩阵. 即

$$(e'_1,\cdots,e'_n)=(e_1,\cdots,e_n) \qquad \text{或} \qquad e'_j=\sum_{i=1}^{n} e_i\cdot(P)^i_j.$$

其中任意矩阵 $A$, 记 $(A)^i_j$ 为 $A$ 的第 $i$ 行 $j$ 列的元素. 对于任意列向量 $X$, 记 $(X)^i$ 为 $X$ 的第 $i$ 个元素.

1. 线性空间 $V$ 中的向量; $((1,0)$-型张量$)$

$$V\text{ 中向量} \xrightarrow[v=(e_1,\cdots,e_n)X]{V\text{ 的一组基}} \text{坐标}+\text{坐标变换公式 (逆变)}$$

$$X'=P^{-1}X \qquad \text{或} \qquad (X')^i=\sum_{j=1}^{n}(X)^j\cdot(P^{-1})^i_j$$

2. 线性空间 $V$ 上的线性变换; $((1,1)$-型张量$)$

$$\text{线性变换} \xrightarrow[\mathscr{A}e=eA]{V\text{ 的一组基}} \text{基下矩阵}+\text{相似变换公式}$$

$$A'=P^{-1}AP \qquad \text{或} \qquad (A')^i_j=\sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n}(A)^s_t\cdot(P^{-1})^i_s\cdot(P)^t_j$$

3. 若 $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, 空间 $V$ 上的内积; $((0,2)$-型张量$)$

$$\text{内积} \xrightarrow[G:=(g_{ij})_{n\times n}=((e_i,e_j))_{n\times n}]{V\text{ 的一组基}} \text{度量矩阵} + \text{合同变换公式}$$

$$G' = P^TGP \qquad \text{或} \qquad g'_{ij} = \sum_{s=1}^{n}\sum_{t=1}^{n} g_{st}\cdot(P)_i^s\cdot(P)_j^t$$

4. 线性空间 $V$ 的对偶空间中的向量; $((0,1)$-型张量$)$

$$V^*\text{ 中向量} \xrightarrow[Y=(f(e_1),\cdots,f(e_n))]{V\text{ 的一组基}} \text{对偶基下的坐标} + \text{坐标变换公式 (协变)}$$

$$Y' = YP \qquad \text{或} \qquad (Y')_j = \sum_{i=1}^{n}(Y)_i\cdot(P)_j^i.$$

从 $n$ 维线性空间 $V$ 出发, 通过某些方法构造出一些其他线性空间. 这些线性空间中的向量都称为 $V$ 上的张量. 例如

1. 逆变张量 $V$
2. 协变张量 $V^*$
3. $(p,q)$-型张量 $V^{p,q} := \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{p\text{个}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{q\text{个}}$
   - $r$ 阶 (逆变) 张量 $V^{\otimes r} = V^{n,0} = \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{r\text{个}}$
   - $(1,1)$-型张量 $V^*\otimes V \cong \mathrm{Hom}(V,V)$
4. $r$-阶对称张量 $(r\geq 0)$ $\mathrm{Sym}^r(V)\subset V^{\otimes r}$
5. $r$-阶反对称张量 $(0\leq r\leq n)$ $\bigwedge^r(V)\subset V^{\otimes r}$
6. $(p,q)$-型赝张量 $V^{p,q}\otimes\bigwedge^n(V)$
   - 赝标量 $\bigwedge^n(V)$
   - 赝矢量 $V\otimes\bigwedge^n(V)$

注: 在这里仅考虑 (仿射) 线性空间上的张量. 若在欧式空间上我们有自然的同构 $V^*\cong V$, $V^{p,q}\cong V^{\otimes(p+q)}$, $V\otimes\bigwedge^n V\cong\bigwedge^{n-1}V$ 等.

接下来, 我们将通过张量积来定义这些空间.

# 线性空间张量积的非严谨定义

**性质 (张量积的一种简单描述)**

设 $e_1, \cdots, e_m$ 为 $V$ 的一组基, 以及 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 为 $W$ 的一组基. 则

1. 张量积 $V \otimes W$ 是以
$$\{e_i \otimes \eta_j \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$$
为一组基的线性空间.
2. (线性性) 对于任意 $v = \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \in V$ 和 $w = \sum_{j=1}^{n} b_j \eta_j \in W$, 都有
$$v \otimes w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j \cdot (e_i \otimes \eta_j) \in V \otimes W.$$

| | $\eta_1$ | $\eta_2$ | $\cdots$ | $\eta_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1 \otimes \eta_1$ | $e_1 \otimes \eta_2$ | $\cdots$ | $e_1 \otimes \eta_n$ |
| $e_2$ | $e_2 \otimes \eta_1$ | $e_2 \otimes \eta_2$ | $\cdots$ | $e_2 \otimes \eta_n$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $e_m$ | $e_m \otimes \eta_1$ | $e_m \otimes \eta_2$ | $\cdots$ | $e_m \otimes \eta_n$ |

缺点: 看不出不依赖于基的选取; 符号 $e_i \otimes \eta_j$ 的意义; 为什么线性?

从上述描述可看出, 当取定线性空间 $V$ 和 $W$ 的一组基后, 这两个线性空间的张量积中的元素 (称为张量) 可以用一个矩阵表达. 我们有

$$V \otimes W \xrightarrow[1:1]{\text{取定 } V \text{ 和 } W \text{ 的一组基}} \mathbb{F}^{m\times n}$$

**定义 (二阶张量的另一种写法 (并矢))**

设 $V$ 和 $W$ 是有限维 $F$-线性空间. 对于任意 $v \in V, w \in W$, 也称它们的张量积 $v \otimes w \in V \otimes W$ 为 $v$ 和 $w$ 的并矢积, 记为 $vw$. 称并矢积的线性组合 (即 $V \otimes W$ 中的元素) 为并矢张量.

注: 取定 $V$ 的一组基后, 并矢积对应于秩一矩阵, 而并矢张量可对应于任意矩阵。

# 欧式空间上的张量积(非严谨定义)

若 $V$ 和 $W$ 为欧氏空间(或酉空间), 则 $V\otimes W$ 上可如下定义一个内积

$$(v_1\otimes w_1, v_2\otimes w_2) := (v_1, v_2)\times(w_1, w_2). \qquad (*)$$

**性质**

设 $V$ 和 $W$ 为两欧氏(酉)空间. 则 $V\otimes W$ 也为欧氏(酉)空间. 若 $e_1,\cdots,e_m$ 和 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 分别为 $V$ 和 $W$ 的标准正交基, 则

$$\{e_i\otimes\eta_j \mid 1\le i\le m, 1\le j\le n\}$$

为 $V\otimes W$ 的一组标准正交基.

**例**

设 $V_1,V_2$ 为二维酉空间. 设 $|\uparrow\rangle_i$ 和 $|\downarrow\rangle_i$ 为 $V_i(i=1,2)$ 的标准正交基. 记

$$|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 := |\uparrow\rangle_1\otimes|\uparrow\rangle_2,\quad |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2 := |\downarrow\rangle_1\otimes|\uparrow\rangle_2,$$
$$|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 := |\uparrow\rangle_1\otimes|\downarrow\rangle_2,\quad |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 := |\downarrow\rangle_1\otimes|\downarrow\rangle_2.$$

则 $|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2, |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2$ 构成 $V_1\otimes V_2$ 的一组标准正交基.

# 多个线性空间的张量积的非严谨定义

**性质 (多个线性空间张量积)**

设 $V_1, V_2 \cdots, V_r$ 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间, 维数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_r$. 设 $\{e_{ij_i} \mid j_i = 1, \cdots, n_i\}$ 为 $V_i$ 的一组基.

1. 张量积 $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ 定义为以
$$\{e_{1,j_1} \otimes e_{2,j_2} \otimes \cdots \otimes e_{r,j_r} \mid 1 \le i \le r, 1 \le j_i \le \dim(V_i)\}$$
为一组基的线性空间.
2. (线性的) 对所有的 $i \in \{1, \cdots, r\}$, 任取 $v_i = \sum_{j_i=1}^{n_i} a_{ij_i} e_{ij_i} \in V_i$, 有
$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_r = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_r=1}^{n_r} a_{1j_1} \cdots a_{rj_r} (e_{1j_1} \otimes \cdots \otimes e_{rj_r}).$$

**例**

设 $V_1$,$V_2$, $V_3$ 为二维酉空间. 设 $|\uparrow\rangle_i$ 和 $|\downarrow\rangle_i$ 为 $V_i (i = 1, 2, 3)$ 的标准正交基. 则 $|\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3, |\uparrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3, |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3, |\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3, |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3, |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3, |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2|\uparrow\rangle_3, |\downarrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2|\downarrow\rangle_3$ 构成 $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ 的标准正交基.

# 张量 (数、向量与线性变换的高阶推广)

1. $V_1 \otimes \cdots \otimes V_r$ 中的元素称为张量. 张量[1]的一般形式为
$$\sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_r=1}^{n_r} a_{j_1,\cdots,j_r}\left(e_{1,j_1}\otimes e_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes e_{r,j_r}\right).$$
2. 对于每个线性空间 $V_i$ 固定一组基 $\{e_{ij} \mid j = 1, \cdots, n_i\}$, 则张量通过其系数阵列表示出来:
   1. 当 $r = 0$ 时, 一个张量就可表示为一个数;
   2. 当 $r = 1$ 时, 一个张量就可表示为一个 $n_1$ 维数组向量;
   3. 当 $r = 2$ 时, 一个张量就可表示为一个 $n_1 \times n_2$ 阶的矩阵 $(a_{ij})_{n_1\times n_2}$;
   4. 当 $r = 3$ 时, 一个张量就可表示为一个由数组成的 $n_1 \times n_2 \times n_3$ 阶三维阵列 $(a_{j_1,j_2,j_3})_{n_1\times n_2\times n_3}$;
   5. 当 $r = 4$ 时, 一个张量就可表示为一个由数组成的 $n_1 \times n_2 \times n_3 \times n_4$ 阶四维阵列 $(a_{j_1,j_2,j_3,j_4})_{n_1\times n_2\times n_3\times n_4}$.
   6. $\cdots$

注: 张量虽然可以用坐标系统来表达为数 (标量) 的阵列, 但张量本身仅仅为张量积中的一个向量, 并不依赖于基 (参照系) 的选择.
我们称这个高维阵列为张量在给定基下的表象. 下面将考虑表象在不同基下的变换.

[1] 不是所以的张量都能写成 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_r$ 的形式.

**定义**

设 $V_1, V_2 \cdots, V_r$ 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间, 维数分别为 $n_1, n_2, \cdots, n_r$. 设 $\{e_{ij_i} \mid j_i = 1, \cdots, n_i\}$ 为 $V_i$ 的一组基. 若

$$T = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} \cdots \sum_{j_r=1}^{n_r} a_{j_1,\cdots,j_r} \left( e_{1,j_1} \otimes e_{2,j_2} \otimes \cdots \otimes e_{r,j_r} \right).$$

则称 $r$ 维阵列 $(a_{j_1,\cdots,j_r})$ 为 $T$ 的在基 $\{e_{ij_i} \mid j_i = 1, \cdots, n_i\} (i = 1, \cdots, r)$ 下的表象.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{F}^{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r} & V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \arrow[l, "V_i\text{ 的基}e'_{i1},e'_{i2},\cdots,e'_{in_i}"', "1:1"] \arrow[r, "V_i\text{ 的基}e_{i1},e_{i2},\cdots,e_{in_i}", "1:1"'] & \mathbb{F}^{n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_r} \\
(a'_{i_1 \cdots i_r})_{n_1 \times \cdots \times n_r} & T \arrow[l, mapsto] \arrow[r, mapsto] & (a_{i_1 \cdots i_r})_{n_1 \times \cdots \times n_r}
\end{tikzcd}$$

# 张量在不同基下表象之间的关系.

$$T = \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_r=1}^{n_r} a_{j_1,\cdots,j_r}\left(e_{1,j_1}\otimes e_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes e_{r,j_r}\right)$$
$$= \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_r=1}^{n_r} a'_{j_1,\cdots,j_r}\left(e'_{1,j_1}\otimes e'_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes e'_{r,j_r}\right)$$

**定理**

设从基 $e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{in_i}$ 到基 $e'_{i1}, e'_{i2}, \cdots, e'_{in_i}$ 的过渡矩阵为 $P_i$. 即

$$(e'_{i1}, e'_{i2}, \cdots, e'_{in_i}) = (e_{i1}, e_{i2}, \cdots, e_{in_i})P_i$$

或者 $e_{ij_i} = \sum_{j'_i}^{n_i} e'_{ij'_i}(P_i^{-1})_{j_i}^{j'_i}$. 则

$$a'_{j'_1 j'_2\cdots j'_r} = \sum_{j_1=1}^{n_1}\sum_{j_2=1}^{n_2}\cdots\sum_{j_r=1}^{n_r} a_{j_1 j_2\cdots j_r}\cdot(P_1^{-1})_{j_1}^{j'_1}\cdot(P_2^{-1})_{j_2}^{j'_2}\cdots(P_r^{-1})_{j_r}^{j'_r}.$$

其中对任意矩阵 $A$, 记 $(A)_j^i$ 为矩阵 $A$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素.

# $(p,q)$-型张量

设 $V$ 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间. 记

$$V^{p,q} := \underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{p\text{个}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{q\text{个}}.$$

称向量空间 $V^{p,q}$ 中的向量为 $V$ 上的$(p,q)$-型张量.

**引理**

任取 $V$ 的一组基 $e_1,\cdots,e_n$. 则我们在其对偶空间上有典则的对偶基

$$f_1,\cdots,f_n,$$

以及 $V^{p,q}$ 上也有典则的一组基

$$\{e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes f_{j_1}\otimes f_{j_2}\otimes\cdots\otimes f_{j_q}\mid 1\le i_1,\cdots,i_p,j_1,\cdots,j_q\le n\}.$$

任意 $(p,q)$-型张量 $T$ 可唯一地表示为:

$$T=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_q=1}^{n}a_{j_1,\cdots,j_q}^{i_1,\cdots,i_p}\cdot e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes f_{j_1}\otimes f_{j_2}\otimes\cdots\otimes f_{j_q}.$$

此时,$T$ 在基 $e_1,\cdots,e_n$ 下的表象为 $(p+q)$ 维阵列

$$(a_{j_1,\cdots,j_q}^{i_1,\cdots,i_p})\in\mathbb{F}^{n\times\cdots\times n\times n\times\cdots\times n}.$$

下面我们将考虑这一表象如何随着基的选取来变动.

# $(p,q)$-型张量在不同基下的表象之间的关系

设 $(e_1',\cdots,e_n')=(e_1,\cdots,e_n)P$ 为 $V$ 另一组基. 则这组基的对偶基 $(f_1',\cdots,f_n')$ 满足

$$(f_1',\cdots,f_n')=(f_1,\cdots,f_n)(P^{-1})^T.$$

记 $P_j^i$ 和 $(P^{-1})_j^i$ 分别为矩阵 $P$ 和 $P^{-1}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素. 若 $T$ 在基 $e_1',\cdots,e_n'$ 下的表象为 $(p+q)$ 维阵列 $(a'^{i_1',\cdots,i_p'}_{j_1',\cdots,j_q'})$. 即,

$$T=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_q=1}^{n}a^{i_1,\cdots,i_p}_{j_1,\cdots,j_q}\cdot e_{i_1}\otimes e_{i_2}\otimes\cdots\otimes e_{i_p}\otimes f_{j_1}\otimes f_{j_2}\otimes\cdots\otimes f_{j_q}$$

$$=\sum_{i_1'=1}^{n}\cdots\sum_{i_p'=1}^{n}\sum_{j_1'=1}^{n}\cdots\sum_{j_q'=1}^{n}a^{i_1',\cdots,i_p'}_{j_1',\cdots,j_q'}\cdot e_{i_1'}'\otimes e_{i_2'}'\otimes\cdots\otimes e_{i_p'}'\otimes f_{j_1'}'\otimes f_{j_2'}'\otimes\cdots\otimes f_{j_q'}'$$

**定理**

$$a'^{i_1',\cdots,i_p'}_{j_1',\cdots,j_q'}=\sum_{i_1=1}^{n}\cdots\sum_{i_p=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n}\cdots\sum_{j_q=1}^{n}a^{i_1,\cdots,i_p}_{j_1,\cdots,j_q}\cdot(P^{-1})^{i_1'}_{i_1}\cdots(P^{-1})^{i_p'}_{i_p}\cdot(P)^{j_1}_{j_1'}\cdots(P)^{j_q}_{j_q'}$$

# 对称张量积的非严谨定义

**性质 (对称张量积)**

设 $V$ 为 $n$ 维 $\mathbb{F}$-线性空间. 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 $V$ 的一组基.

1. 线性空间 $V$ 的 $r$ 阶张量积 $\mathrm{Sym}^r(V)$ 是以
$$\{e_{i_1} \odot e_{i_2} \odot \cdots \odot e_{i_r} \mid 1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_r \le n\}$$
为一组基的线性空间.
2. (对称性) 对 $i_1, i_2, \cdots, i_r$ 的任意其他排序 $i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \cdots, i_{\sigma(r)}$, 有
$$e_{i_{\sigma(1)}} \odot e_{i_{\sigma(2)}} \odot \cdots \odot e_{i_{\sigma(r)}} = e_{i_1} \odot e_{i_2} \odot \cdots \odot e_{i_r};$$
3. (线性性) 对所有的 $i \in \{1, \cdots, r\}$, 任取 $v_i = \sum_{j_i=1}^{n_i} a_{ij_i} e_{ij_i} \in V_i$, 有
$$v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_r = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_r=1}^{n_r} a_{1j_1} \cdots a_{rj_r} (e_{1j_1} \odot \cdots \odot e_{rj_r}).$$

| $\mathrm{Sym}^2(V)$ | $e_1$ | $e_2$ | $\cdots$ | $e_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $e_1$ | $e_1 \odot e_1$ | $e_1 \odot e_2$ | $\cdots$ | $e_1 \odot e_n$ |
| $e_2$ | | $e_2 \odot e_2$ | $\cdots$ | $e_2 \odot e_n$ |
| $\vdots$ | | | $\ddots$ | $\vdots$ |
| $e_n$ | | | | $e_n \odot e_n$ |

**性质**

设 $V$ 为 $n$ 维线性空间. 设 $X_1, \cdots, X_n \in V$ 为 $V$ 的一组基. 考虑以 $X_1, \cdots, X_n$ 为变元的 $r$-次齐次多项式组成的空间 $\mathbb{F}[X_1, \cdots, X_n]_r$. 则

$$V = \mathbb{F}[X_1, \cdots, X_n]_1,$$

以及

$$\mathrm{Sym}^r V \cong \mathbb{F}[X_1, \cdots, X_n]_r.$$

记 $V^{\otimes r} := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{r\text{次}}$. 我们可以定义如下线性单射

$$\begin{aligned} \mathrm{Sym}(V) &\longrightarrow V^{\otimes r} \\ v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_r &\longmapsto \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)} \in V^{\otimes r} \end{aligned}$$

于是 $\mathrm{Sym}^r(V)$ 可看成由“对称的张量”组成的 $V^{\otimes r}$ 的子空间

$$\mathrm{Sym}^r(V) \subset V^{\otimes r}$$

[2]

---

[2] 通过上述线性单射, 我们将 $v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_r$ 和 $\frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)} \in V^{\otimes r}$ 等同起来. 例如: $v \odot v = v \otimes v$, $v \odot \omega = \frac{v \otimes w + w \otimes v}{2}$, $v \odot v \odot v = v \otimes v \otimes v$

$$v \odot w \odot u = \frac{v \otimes w \otimes u + v \otimes u \otimes w + w \otimes v \otimes u + w \otimes u \otimes v + u \otimes v \otimes w + u \otimes w \otimes v}{6}.$$

# 对称张量的表象

取定 $V$ 的一组基 $e_1, \cdots, e_n$, 任取

$$T = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} a_{i_1, i_2, \cdots, i_r} \cdot e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \in V^{\otimes n}.$$

即 $(a_{i_1, i_2, \cdots, i_r})$ 为张量 $T \in V^{\otimes n}$ 在基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的表象.

**性质**

张量 $T$ 落在子空间 $\mathrm{Sym}^r V$ 中, 当且仅当对任意 $1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_r \leq n$ 以及任意 $1 \leq s < t \leq r$, 有

$$a_{i_1, \cdots, i_s, \cdots, i_t, \cdots, i_r} = a_{i_1, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_r}$$

**例**

$(2, 0)$-型张量 $T$ 对称当且仅当其对应矩阵为对称矩阵.

# 反对称张量积的非严谨定义

**性质 (反对称张量积)**

设 $V$ 为 $n$ 维 $\mathbb{F}$-线性空间. 设 $\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为 $V$ 的一组基.

1. 线性空间 $V$ 的 $r$ 阶张量积 $\bigwedge^r(V)$ 是以
$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \mid 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq n\}$$
为一组基的线性空间.
2. (反对称性) 对任意 $1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_r \leq n$,
$$e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} := \begin{cases} (-1)^{\tau(\sigma)} e_{i_{\sigma(1)}} \wedge e_{i_{\sigma(2)}} \wedge \cdots \wedge e_{i_{\sigma(r)}} & \text{两两不同.} \\ 0 & \text{其他;} \end{cases}$$
其中 $i_{\sigma(1)}, i_{\sigma(2)}, \cdots, i_{\sigma(r)}$ 为从小到大的排序.
3. (线性性) 对所有的 $i \in \{1, \cdots, r\}$, 任取 $v_i = \sum_{j_i=1}^{n_i} a_{ij_i} e_{ij_i} \in V_i$, 则
$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r = \sum_{j_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{j_r=1}^{n_r} a_{1j_1} \cdots a_{rj_r} (e_{1j_1} \wedge \cdots \wedge e_{rj_r}).$$

注: 线性空间 $\bigwedge^r V$ 的维数为 $\binom{n}{r}$. 特别地, $\bigwedge^0 V = \mathbb{F}$ 和 $\bigwedge^n V$ 都为 1 维线性空间. 前者中的元素被称为标量, 而后者中的元素被称为赝标量.

我们可以定义如下线性单射

$$\bigwedge^r V \longrightarrow V^{\otimes r}$$

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r \longmapsto \frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}(-1)^{\tau(\sigma)} v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(r)} \in V^{\otimes r}$$

于是 $\bigwedge^r(V)$ 可看成由"反对称的张量"组成的 $V^{\otimes r}$ 的子空间[3]

$$\bigwedge^r V \subset V^{\otimes r}$$

[3]通过上述线性单射, 我们将 $v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_r$ 和 $\frac{1}{r!}\sum_{\sigma\in S_r}(-1)^{\tau(\sigma)} v_{\sigma(1)}\otimes v_{\sigma(2)}\otimes\cdots\otimes v_{\sigma(r)} \in V^{\otimes r}$ 等同起来. 例如: $v\odot v=0$, $v\odot \omega=\frac{v\otimes w-w\otimes v}{2}$, $v\odot v\odot v=0$

$$v\odot w\odot u=\frac{v\otimes w\otimes u-v\otimes u\otimes w-w\otimes v\otimes u+w\otimes u\otimes v+u\otimes v\otimes w-u\otimes w\otimes v}{6}.$$

# 反对称张量的表象

取定 $V$ 的一组基 $e_1, \cdots, e_n$, 任取

$$T = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_r=1}^{n} a_{i_1, i_2, \cdots, i_r} \cdot e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \in V^{\otimes n}.$$

即 $(a_{i_1, i_2, \cdots, i_r})$ 为张量 $T \in V^{\otimes n}$ 在基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的表象.

**性质**

张量 $T$ 落在子空间 $\bigwedge^r V$ 中, 当且仅当对任意 $1 \le i_1, i_2, \cdots, i_r \le n$ 以及任意 $1 \le s < t \le r$, 有

$$a_{i_1, \cdots, i_s, \cdots, i_t, \cdots, i_r} = -a_{i_1, \cdots, i_t, \cdots, i_s, \cdots, i_r}$$

**例**

$(2, 0)$-型张量 $T$ 反对称当且仅当其对应矩阵为反对称矩阵.

设 $V$ 为 $n$ 维 $\mathbb{F}$-线性空间. 则 $\bigwedge^n V$ 为 1 维线性空间, 称其中的向量为贋标量. 记

$$V^{p,q}\otimes\bigwedge^n V:=\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{p\text{个}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{q\text{个}}\otimes\bigwedge^n V.$$

称向量空间 $V^{p,q}\otimes\bigwedge^n V$ 中的向量为 $V$ 上的$(p,q)$-型贋张量.
特别地, $V\otimes\bigwedge^n V$ 中的向量称为贋矢量.

# 赝标量的表象

**定义**

设 $V$ 为 $n$ 维 $\mathbb{F}$-线性空间. 任取 $V$ 的一组基 $e_1, \cdots, e_n$, 则 1 维线性空间 $\bigwedge^n V$ 存在典范基 $e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$. 称 $a$ 为赝标量 $T \in \bigwedge^n V$ 在基 $e_1, \cdots, e_n$ 下的表象, 若

$$T = a \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n.$$

**性质**

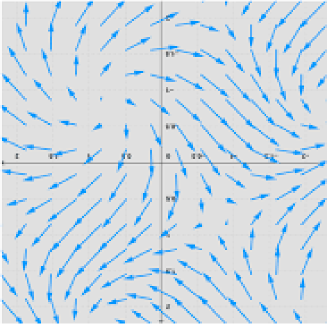
若 $(e'_1, \cdots, e'_n) = (e_1, \cdots, e_n)P$ 为 $V$ 的另一组基. 设 $a'$ 为 $T$ 在基 $e'_1, \cdots, e'_n$ 下的表象. 则

$$a' = \det(P)^{-1} \cdot a.$$

**推论**

- 若 $P$ 为第一类正交矩阵, 则 $a'$ 和 $a$ 相等.
- 若 $P$ 为第二类正交矩阵, 则 $a'$ 和 $a$ 相差一个符号.
- 特别地, 若交换一组基中的两个向量的位置, 则赝标量对应的表象将改变符号.

向量场



切空间

张量场 (例如余切向量场 (即一阶微分形式), 应力张量场等)

标量场 (函数)

# 严谨定义

上述非严谨的定义中，需要固定各线性空间的一组基。而数学和物理中通常希望一个量或者一个概念不依赖于基 (坐标系、参考系) 的选取。这要求我们内蕴地给出张量积的定义。

在给出严谨定义之前，我们需要引入一些基本概念。

- 线性函数与对偶空间
- 多重线性映射 (函数)

设 $V$ 和 $W$ 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间. 从 $V$ 到 $W$ 上的全体线性映射组成的集合记为

$$\mathrm{Hom}(V,W) = \{\mathcal{A}\colon V \to W \mid \mathcal{A}\text{为线性映射}\}.$$

称从 $V$ 到 $\mathbb{F}$ 的线性映射为 $V$ 上的线性函数. 记

$$V^* = \mathrm{Hom}(V,\mathbb{F}) = \{f\colon V \to \mathbb{F} \mid f\text{为线性函数}\}.$$

在 $\mathrm{Hom}(V,W)$ 以及 $V^*$ 上, 按如下方式定义加法和数乘

$$(f+g)(v) := f(v) + g(v)$$
$$(\lambda f)(v) := \lambda f(v)$$

**性质**

在上述加法和数乘下, $\mathrm{Hom}(V,W)$ 和 $V^*$ 均构成 $\mathbb{F}$-线性空间. 称后者为 $V$ 的对偶空间.

# 对偶空间基本性质

**性质 (对偶空间的维数与基)**

- 对偶空间 $V^*$ 的维数与 $V$ 的维数相同.
- 若 $e_1,\cdots,e_n$ 为 $V$ 的一组基, 则 $V^*$ 存在唯一的一组基 $f_1,\cdots,f_n$ 满足

$$f_j(e_i)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & 若 i=j;\\ 0, & 若 i\neq j\end{cases}.$$

称 $f_1,\cdots,f_n$ 为 $e_1,\cdots,e_n$ 的对偶基.

我们有如下自然的取值映射 (evaluation map):

$$ev\colon V^*\times V\to\mathbb{F};\quad (f,v)\mapsto f(v).$$

**性质**

$$V\cong V^{**}\quad v\mapsto ev(-,v)$$

注: 若我们不要求 $V$ 为有限维的, 则映射 $V\to V^{**}$ 仅为单射.

# 向量的逆变性与对偶向量的协变性

**性质 (向量的逆变性与对偶向量的协变性)**

设 $e_1, \cdots, e_n$ 以及 $e_1', \cdots, e_n'$ 为 $V$ 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间的两组基. 设过渡矩阵为 $A$, 即

$$(e_1', \cdots, e_n') = (e_1, \cdots, e_n)A.$$

记这两组基的对偶基分别为 $f_1, \cdots, f_n$ 和 $f_1', \cdots, f_n'$.

1. *(向量的逆变性)* 设 $v \in V$ 在两组基下坐标为 $X$ 和 $X'$. 即,
$$v = (e_1, \cdots, e_n)X = (e_1', \cdots, e_n')X'.$$
则
$$X' = A^{-1}X \quad \text{或} \quad (x_1', \cdots, x_n') = (x_1, \cdots, x_n)(A^{-1})^T.$$
2. *(对偶向量协变性)* 设对偶向量 $f$ 在两组对偶基下坐标为 $Y$ 和 $Y'$. 即,
$$f = (f_1, \cdots, f_n)Y = (f_1', \cdots, f_n')Y'.$$
则
$$Y' = A^TY \quad \text{或} \quad (y_1', \cdots, y_n') = (y_1, \cdots, y_n)A.$$

证明思路:

$$(f_1', \cdots, f_n') = (f_1, \cdots, f_n)(A^T)^{-1}.$$

设 $V_1, V_2, \cdots, V_r, W$ 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间. 若映射

$$\tau\colon V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r \to W$$

对每个分量都是线性的, 即对所有的指标 $i = 1, 2, \cdots, r$, 都有

$$\tau(v_1, \cdots, \alpha v_i + \beta v_i', \cdots, v_r) = \alpha\tau(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_r) + \beta\tau(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_r),$$

则称 $\tau$ 为从 $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$ 到 $W$ 的多重线性映射. 特别地, 若 $W = \mathbb{F}$, 则称多重线性映射

$$\tau\colon V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r \to \mathbb{F}$$

为 $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$ 上的多重线性函数.

**例 (行列式)**

行列式 $\det\colon \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \times \cdots \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}$ 为多重线性函数.

**例 (取值映射)**

取值映射 $ev\colon V^* \times V \to \mathbb{F}$ 是双线性函数.

**例 (三维空间的点积)**

$$- \cdot -\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R};$$

$$(a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

**例 (三维空间的叉积)**

$$- \times -\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$(a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1).$$

# 多重线性映射组成的空间

我们如下定义多重线性映射的加法和数乘. 任取从 $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$ 到 $W$ 的两个多重线性映射 $\tau$ 和 $\tau'$, 以及 $\lambda \in \mathbb{F}$,

$$(\tau + \tau')(v_1, v_2, \cdots, v_n) := \tau(v_1, v_2, \cdots, v_n) + \tau(v_1, v_2, \cdots, v_n);$$

$$(\lambda\tau)(v_1, v_2, \cdots, v_n) := \lambda \cdot \tau(v_1, v_2, \cdots, v_n).$$

**性质**

从 $V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_r$ 到 $W$ 的全体多重线性映射组成的集合在上述加法和数乘下构成 $\mathbb{F}$-线性空间.

# 两线性空间的张量积严谨定义

设 $V$ 和 $W$ 为两有限维 $\mathbb{F}$-线性空间.

**定义 (张量积的无坐标化严谨定义)**

称线性空间 $V \otimes W := \{\tau \colon V^* \times W^* \to \mathbb{F} \mid \tau$ 为双线性函数$\}$ 为 $V$ 和 $W$ 的张量积.

任取 $v \in V$ 以及 $w \in W$, 如下定义从 $V^* \times W^*$ 到 $\mathbb{F}$ 函数
$$(f, g) \mapsto f(v)g(w).$$
则这一函数为双线性的, 记为 $v \otimes w \in V \otimes W$.

**性质**

设 $e_1, \cdots, e_m$ 为 $V$ 的一组基, 以及 $\eta_1, \cdots, \eta_n$ 为 $W$ 的一组基. 则
$$\{e_i \otimes \eta_j \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$
为张量积 $V \otimes W$ 的一组基.

**性质 (张量运算关于分量的线性性)**

$$(\alpha v + \beta v') \otimes w = \alpha(v \otimes w) + \beta(v' \otimes w) \in V \otimes W.$$
$$v \otimes (\alpha w + \beta w') = \alpha(v \otimes w) + \beta(v \otimes w') \in V \otimes W.$$

# 多个线性空间的张量积的严谨定义

设 $V_1,\cdots,V_r$ 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间.

**定义**

记 $V_1\otimes\cdots\otimes V_r := \{\tau\colon V_1^*\times\cdots\times V_r^*\to\mathbb{F}\mid \tau$为多重线性函数$\}$. 称这一线性空间为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间 $V_1,\cdots,V_r$ 的**张量积**, 其中的向量均称为**张量**.

如下定义 $v_1\otimes\cdots\otimes v_r\in V_1\otimes\cdots\otimes V_r$:

$$v_1\otimes\cdots\otimes v_r\colon (f_1,\cdots,f_r)\mapsto f_1(v_1)\cdots f_r(v_r).$$

**性质**

设 $\{e_{ij}\mid j=1,\cdots,n_i\}$ 为 $V_i$ 的一组基. 则

$$\{e_{1,j_1}\otimes e_{2,j_2}\otimes\cdots\otimes e_{r,j_r}\mid 1\le i\le r, 1\le j_i\le \dim(V_i)\}$$

为 $V_1\otimes\cdots\otimes V_r$ 的一组基.

设 $V$ 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间. 记

$$V^{p,q} := \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p\text{个}} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q\text{个}}.$$

称向量空间 $V^{p,q}$ 中的向量为 $V$ 上的 $(p,q)$-型张量.

**引理**

设 $U, V, W$ 为三个有限维 $\mathbb{F}$-线性空间. 则存在如下典范映射

$$V \cong V \otimes \mathbb{F} \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{F}, V) \cong \mathrm{Hom}(V^*, \mathbb{F}),$$

和

$$\mathrm{Hom}(U \otimes V^*, W) \cong \mathrm{Hom}(U, V \otimes W).$$

**定理**

设 $V$ 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间. 则以下三个线性空间之间存在典范同构

- $\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{p\text{个}}\otimes\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{q\text{个}}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}(\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{q\text{个}},\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{p\text{个}})$
- $\mathrm{Hom}_{\mathbb{F}}\left(\underbrace{V^*\otimes\cdots\otimes V^*}_{p\text{个}}\otimes\underbrace{V\otimes\cdots\otimes V}_{q\text{个}},\mathbb{F}\right)$
- 多重线性函数 $\phi$: $\underbrace{V^*\times\cdots\times V^*}_{p\text{个}}\times\underbrace{V\times\cdots\times V}_{q\text{个}}\to\mathbb{F}$ 组成的空间.

这些空间中的向量都可称为 $(p,q)$-型张量.

# 对称张量积的严谨定义

设 $V$ 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间. 设 $\tau\colon \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{个}} \to \mathbb{F}$ 为 $r$-重线性函数.

我们称其为对称的, 若对于任意 $1 \le i < j \le r$ 以及任意 $f_1, f_2, \cdots, f_r \in V^*$, 都有

$$\tau(f_1, \cdots, f_i, \cdots, f_j, \cdots, f_r) = \tau(f_1, \cdots, f_j, \cdots, f_i, \cdots, f_r).$$

**定义**

记 $\mathrm{Sym}^r(V) := \{\tau\colon \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{个}} \to \mathbb{F} \mid \tau\text{为对称的 } r \text{ 重线性函数}\}$. 则这是 $V^{\otimes r}$ 的一个子空间. 称之 $V$ 的 $r$ 阶对称张量积.

定义

$$v_1 \odot v_2 \odot \cdots \odot v_r := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)} \in V^{\otimes r}$$

**性质**

设 $e_1, \cdots, e_n$ 为 $V$ 的一组基. 则

$$\{e_{i_1} \odot e_{i_2} \odot \cdots \odot e_{i_r} \mid 1 \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_r \le n\}$$

为 $\mathrm{Sym}^r(V)$ 一组基.

# 外积与反对称张量的严谨定义

设 $V$ 为有限维 $\mathbb{F}$-线性空间. 设 $\tau\colon \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{个}} \to \mathbb{F}$ 为 $r$-重线性函数.

我们称其为反对称的, 若对于任意 $1 \le i < j \le r$ 以及任意 $f_1, f_2, \cdots, f_r \in V^*$, 都有

$$\tau(f_1, \cdots, f_i, \cdots, f_j, \cdots, f_r) = -\tau(f_1, \cdots, f_j, \cdots, f_i, \cdots, f_r).$$

**定义**

记 $\bigwedge^r(V) := \{\tau\colon \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{个}} \to \mathbb{F} \mid \tau \text{为反对称的 } r \text{ 重线性函数}\}$. 则这是 $V^{\otimes r}$ 的一个子空间. 称之 $V$ 的 $r$ 阶反对称张量积.

定义

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r := \frac{1}{r!} \sum_{\sigma \in S_r} (-1)^{\tau(\sigma)} v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)} \in V^{\otimes r}$$

**性质**

设 $e_1, \cdots, e_n$ 为 $V$ 的一组基. 则

$$\{e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_r} \mid 1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n\}$$

为 $\bigwedge^r(V)$ 一组基.

设 $p, q$ 为正整数. 对于任意给定 $1 \leq i \leq p$ 和 $1 \leq j \leq q$, 我们有如下缩并映射

$$\Phi^i_j \colon V^{(p,q)} \longrightarrow V^{(p-1,q-1)}$$

其将 $v_1 \otimes \cdots \otimes v_i \otimes \cdots \otimes v_p \otimes f_1 \otimes \cdots \otimes f_j \otimes \cdots \otimes f_q$ 映成
$f_j(v_i) \cdot (v_1 \otimes \cdots \otimes v_{i-1} \otimes v_{i+1} \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (f_1 \otimes \cdots \otimes f_{j-1} \otimes f_{j+1} \otimes \cdots \otimes f_q)$

### 性质

设 $V$ 和 $W$ 为两有限维 $\mathbb{F}$-线性空间. 则

1. 存在典范同构
$$W \otimes V^* \cong \mathrm{Hom}(V, W)$$
将 $w \otimes f$ 映成线性映射 $(v \mapsto f(v)w)$.
2. 若 $W = V$, 则上述同构与行列式的合成正好为缩并映射. 即下图交换
$$\begin{tikzcd} V \otimes V^* \arrow[r, "\cong"] \arrow[dr, "\Phi^1_1"'] & \mathrm{Hom}(V, V) \arrow[d, "\det"] \\ & \mathbb{F} \end{tikzcd}$$